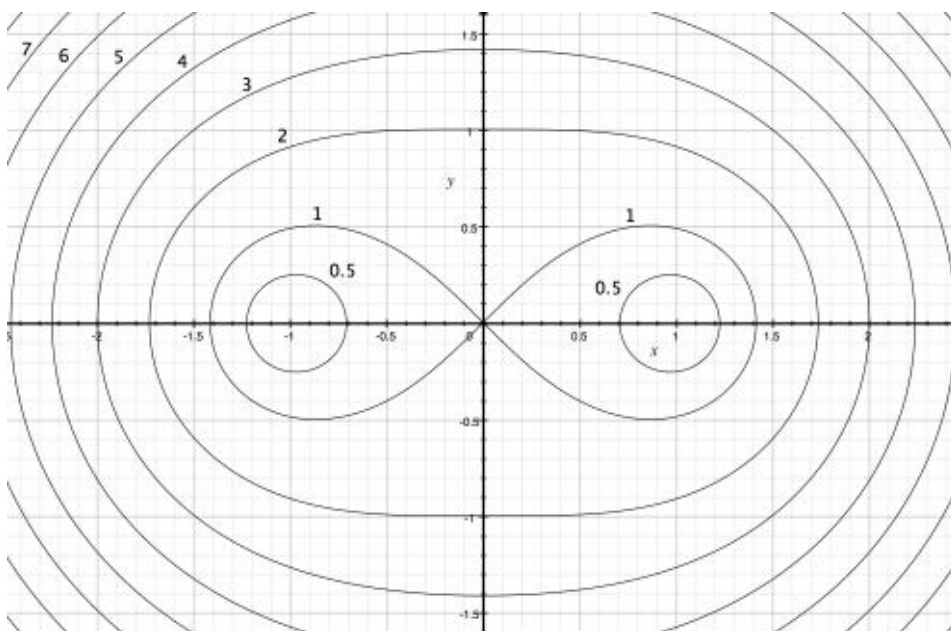


A Cassini - görbéről

Giovanni Domenico Cassini, a 17. - 18. században élt olasz származású francia csillagász neve – egyebek mellett – a róla elnevezett görbéről is ismert lehet; ilyeneket mutat az 1. ábra is – ld.: [1]!



1. ábra

Az ezekkel kapcsolatos fontosabb matematikai tudnivalók megtalálhatók az interneten is – ld. pl.: [1], [2], [3]! Odakattintva látható, hogy nem annyira egyszerű dolgok ezek. Mégis, most éppen ezeket fogjuk tanulmányozni: megmutatjuk, hogy már egy középiskolás tanuló is érdemben foglalkozhat e témával.

Nem kétséges, hogy a kúpszeletek – kör, ellipszis, parabola, hiperbola – a legismertebb síkgörbék. Gyűjtőnevüket arról kapták, hogy egy (kettős) körkúp különböző helyzetű metszősíkkal való síkmetszeteiként is előállíthatók.

A Cassini - görbék a körgyűrű - felület – más néven: *tórusz* – metszetgörbéi:

~ a tórusz úgy áll elő, hogy egy r sugarú körlapot annak síkjában elhelyezkedő egyenes, mint forgástengely körül megforgatunk – 2. ábra;

~ a Cassini - görbék úgy állnak elő, hogy a tóruszt egy a forgástengellyel párhuzamos síksereggel metsszük el.

A tóruszfelület egy P pontjának koordinátáit egy olyan derékszögű ($Oxyz$) koordináta-rendszerben írjuk fel, melynek z tengelye a forgástengely. A 3. ábra szerint:

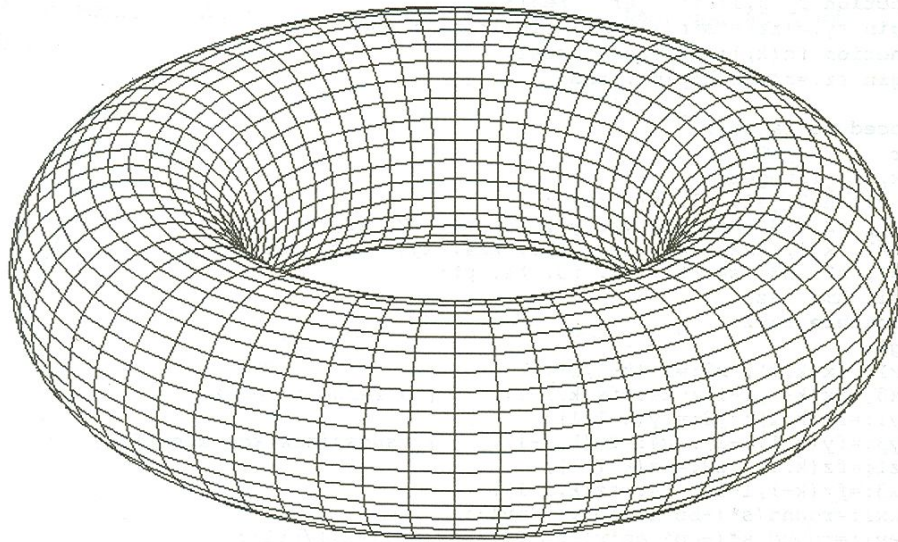
$$x_p = (R + r \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \psi;$$

$$y_p = (R + r \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \psi;$$

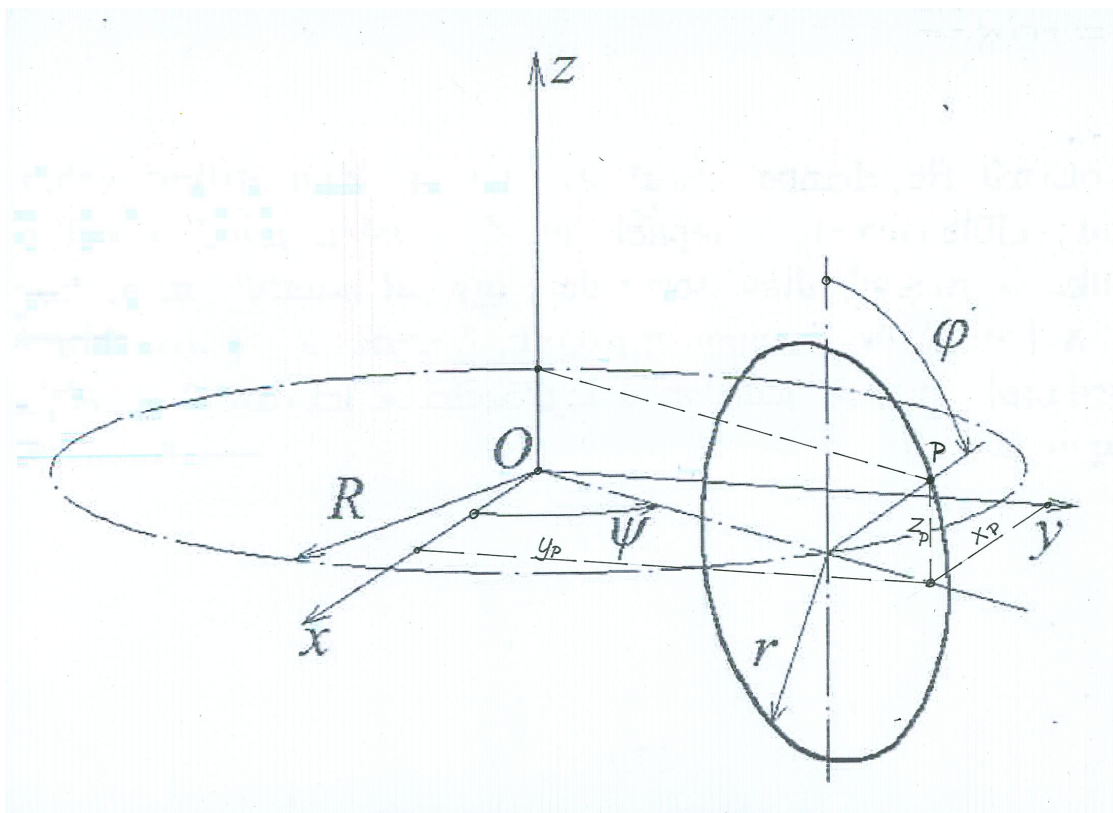
$$z_p = r \cdot \cos \varphi, \quad \text{ahol}$$

(1)

$$0 \leq \varphi \leq 360^\circ, \quad 0 \leq \psi \leq 360^\circ.$$



2. ábra



3. ábra

A 2. és 3. ábrák forrása: [4].

Most írjuk fel – a továbbiakban a „P” indexet elhagyva – a $z = z(x, y)$ függvénykapcsolatot! Ennek érdekében (1) -ből kiküszöböljük a φ és a ψ paramétereket:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= [(R + r \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \psi]^2 + [(R + r \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \psi]^2 = \\ &= (R + r \cdot \sin \varphi)^2 \cdot (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = (R + r \cdot \sin \varphi)^2, \end{aligned}$$

tehát

$$x^2 + y^2 = (R + r \cdot \sin \varphi)^2. \quad (2)$$

(2) -ből pozitív gyököt vonva és rendezve:

$$r \cdot \sin \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} - R; \quad (3)$$

ehhez hozzávéve (1) harmadik egyenletéből:

$$r \cdot \cos \varphi = z, \quad (4)$$

(3) és (4) -ből négyzetre emeléssel és összeadással:

$$(r \cdot \cos \varphi)^2 + (r \cdot \sin \varphi)^2 = (z)^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2, \text{ vagyis}$$

$$r^2 = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2, \text{ innen}$$

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2, \text{ végül}$$

$$z(x, y) = \pm \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2}. \quad (5)$$

Az (5) képlet segítségével keressük a z tengellyel párhuzamos, $x = x_0$ egyenletű metszősíkkal keletkező síkmetszet egyenletét. Ekkor (5) -ből:

$$\underline{\underline{z(x_0, y) = \pm \sqrt{r^2 - (\sqrt{x_0^2 + y^2} - R)^2}}}. \quad (6)$$

A (6) egyenlet alapján dolgozunk a továbbiakban. A térbeli helyzetet a 4. ábra szemlélteti. A görbesereg két részre oszlik, az 1. és a 2. szakasznak megfelelően:

~ 1. szakasz: $R - r \leq x_0^{(1)} \leq R + r$;

~ 2. szakasz: $0 \leq x_0^{(2)} \leq R - r$.

A metszősíkok nyomvonalait piros színnel rajzoltuk meg.

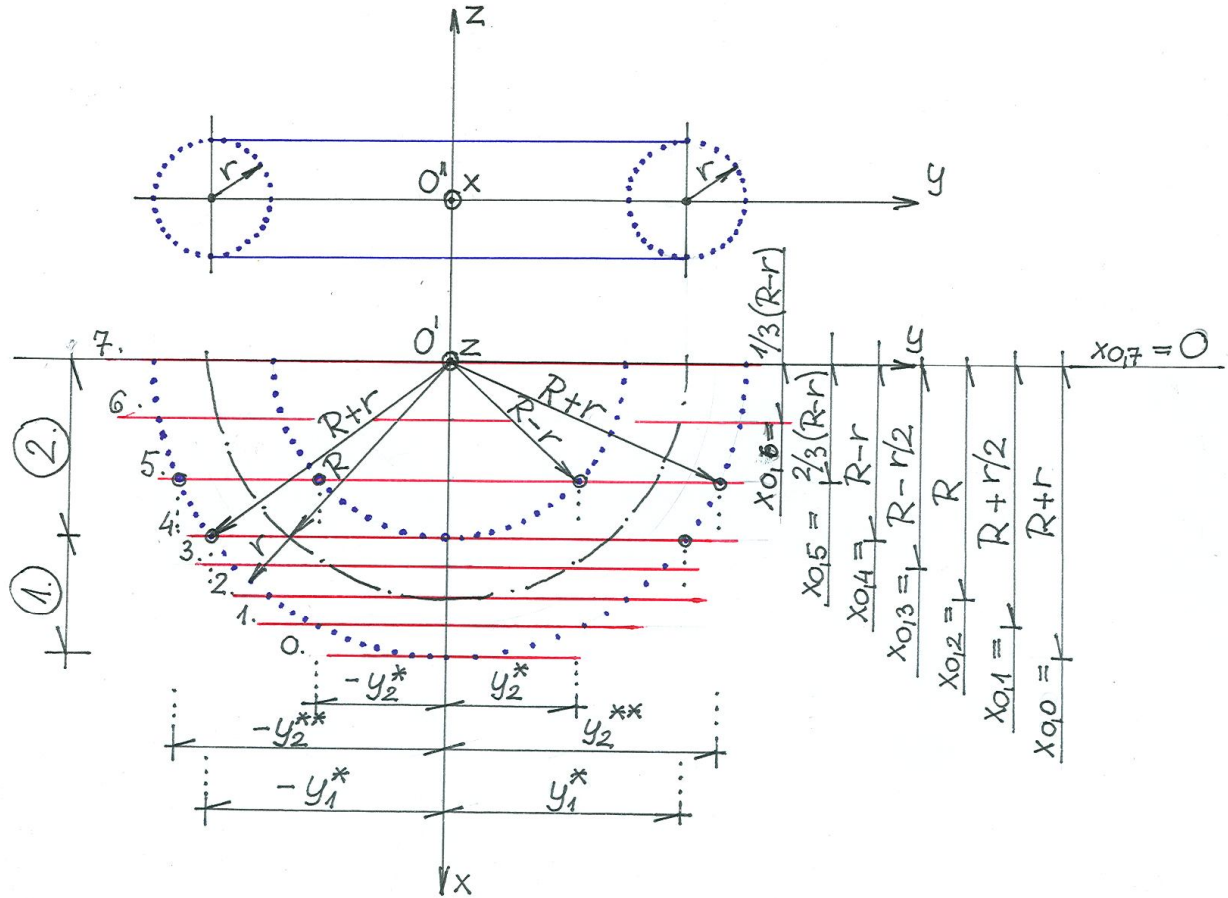
A (6) képlet alkalmazásához meg kell határoznunk az y változó értelmezési tartományát, ill. annak határait, minden metszetre. Ez a Pitagorász - tétellel történik.

1. szakasz:

$$y_1^* = \sqrt{(R + r)^2 - x_{0,i}^2}; \quad i(1) = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (7)$$

Fennáll, hogy

$$-y_1^* \leq y_1 \leq y_1^*. \quad (8)$$



4. ábra

2. szakasz:

$$y_2^* = \sqrt{(R-r)^2 - x_{0,i}^2};$$

$$y_2^{**} = \sqrt{(R+r)^2 - x_{0,i}^2}; \quad i(2) = 5, 6, 7.$$

Fennáll, hogy

$$-y_2^{**} \leq y_2^{\text{bal}} \leq -y_2^*;$$

$$y_2^* \leq y_2^{\text{jobb}} \leq y_2^{**}.$$

Az ábrázoláshoz felvett $x_{0,i}$ méretek a 4. ábrán láthatók.

A felírt összefüggések helyessége a 4. ábrán ellenőrizhető.

Most írjuk fel egyenként az ábrázolandó tórusz - metszetek képleteit!

1. szakasz:

„0.”: $x_{0,0} = R + r;$

most (7) és (11) - gyel:

$$y_{1,0}^* = 0.$$

Majd (8) - nak megfelelően:

$$y_{1,0} = 0. \quad (13)$$

Most (6), (11), (13) - mal:

$$z(x_{0,0}, y_{1,0}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x_{0,0}^2 + y_{1,0}^2} - R \right)^2} = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{(R+r)^2 + 0^2} - R \right)^2} = 0,$$

tehát

$$\underline{z(x_{0,0}, y_{1,0}) = 0.} \quad (14)$$

$$\text{„1.:” } x_{0,1} = R + \frac{r}{2}; \quad (15)$$

most (7) és (15) - tel:

$$y_{1,1}^* = \sqrt{(R+r)^2 - x_{0,1}^2} = \sqrt{(R+r)^2 - \left(R + \frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r \cdot \left(R + \frac{3}{4} \cdot r\right)}, \text{ tehát}$$

$$y_{1,1}^* = \sqrt{r \cdot \left(R + \frac{3}{4} \cdot r\right)}. \quad (16)$$

Most (8) szerint:

$$-y_{1,1}^* \leq y_{1,1} \leq y_{1,1}^*, \quad (17)$$

majd (16) és (17) - tel:

$$-\sqrt{r \cdot \left(R + \frac{3}{4} \cdot r\right)} \leq y_{1,1} \leq \sqrt{r \cdot \left(R + \frac{3}{4} \cdot r\right)}. \quad (18)$$

Ezután (6) szerint:

$$z(x_{0,1}, y_{1,1}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x_{0,1}^2 + y_{1,1}^2} - R \right)^2}, \quad (19)$$

majd (15) - tel is:

$$\underline{z(x_{0,1}, y_{1,1}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{\left(R + \frac{r}{2}\right)^2 + y_{1,1}^2} - R \right)^2}.} \quad (20)$$

$$\text{„2.”: } x_{0,2} = R; \quad (21)$$

a fentiekhez hasonlóan:

$$y_{1,2}^* = \sqrt{(R+r)^2 - x_{0,2}^2} = \sqrt{(R+r)^2 - R^2} = \sqrt{r \cdot (2 \cdot R + r)}, \text{ tehát}$$

$$y_{1,2}^* = \sqrt{r \cdot (2 \cdot R + r)}; \quad (22)$$

ezzel:

$$-\sqrt{r \cdot (2 \cdot R + r)} \leq y_{1,2} \leq \sqrt{r \cdot (2 \cdot R + r)}; \quad (23)$$

$$z(x_{0,2}, y_{1,2}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x_{0,2}^2 + y_{1,2}^2} - R \right)^2}, \text{ azaz}$$

$$\underline{z(x_{0,2}, y_{1,2}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{R^2 + y_{1,2}^2} - R \right)^2}}. \quad (24)$$

$$\text{„3.”: } x_{0,3} = R - \frac{r}{2}; \quad (25)$$

$$y_{1,3}^* = \sqrt{(R+r)^2 - x_{0,3}^2} = \sqrt{(R+r)^2 - \left(R - \frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{3r \cdot \left(R + \frac{r}{4}\right)}, \text{ tehát}$$

$$y_{1,3}^* = \sqrt{3r \cdot \left(R + \frac{r}{4}\right)}; \quad (26)$$

ezzel:

$$-\sqrt{3r \cdot \left(R + \frac{r}{4}\right)} \leq y_{1,3} \leq \sqrt{3r \cdot \left(R + \frac{r}{4}\right)}; \quad (27)$$

$$z(x_{0,3}, y_{1,3}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x_{0,3}^2 + y_{1,3}^2} - R \right)^2}, \text{ azaz}$$

$$\underline{z(x_{0,3}, y_{1,3}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{\left(R - \frac{r}{2}\right)^2 + y_{1,3}^2} - R \right)^2}}. \quad (28)$$

$$\text{„4.”: } x_{0,4} = R - r; \quad (29)$$

$$y_{1,4}^* = \sqrt{(R+r)^2 - x_{0,4}^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}, \text{ tehát}$$

$$y_{1,4}^* = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}; \quad (30)$$

ezzel:

$$-2 \cdot \sqrt{R \cdot r} \leq y_{1,4} \leq 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}; \quad (31)$$

$$z(x_{0,4}, y_{1,4}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x_{0,4}^2 + y_{1,4}^2} - R \right)^2}, \text{ azaz}$$

$$z(x_{0,4}, y_{1,4}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{(R-r)^2 + y_{1,4}^2} - R \right)^2}. \quad (32)$$

2. szakasz:

„5.”: $x_{0,5} = \frac{2}{3} \cdot (R-r);$ (33)

most a (9) képletekkel:

$$y_{2,5}^* = \sqrt{(R-r)^2 - x_{0,5}^2} = \sqrt{(R-r)^2 - \left[\frac{2}{3} \cdot (R-r) \right]^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot (R-r), \quad \text{tehát}$$

$$y_{2,5}^* = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot (R-r); \quad (34)$$

$$y_{2,5}^{**} = \sqrt{(R+r)^2 - x_{0,5}^2} = \sqrt{(R+r)^2 - \left[\frac{2}{3} \cdot (R-r) \right]^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5 \cdot R^2 + 26 \cdot R \cdot r + 5 \cdot r^2},$$

tehát az egyszerűbb alakkal:

$$y_{2,5}^{**} = \sqrt{(R+r)^2 - \left[\frac{2}{3} \cdot (R-r) \right]^2}; \quad (35)$$

most a (10) képlet szerint:

$$-y_{2,5}^{**} \leq y_{2,5}^{\text{bal}} \leq -y_{2,5}^*, \text{ azaz}$$

$$-\sqrt{(R+r)^2 - \left[\frac{2}{3} \cdot (R-r) \right]^2} \leq y_{2,5}^{\text{bal}} \leq -\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot (R-r); \quad (36)$$

továbbá

$$y_{2,5}^* \leq y_{2,5}^{\text{jobb}} \leq y_{2,5}^{**}, \text{ azaz}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot (R-r) \leq y_{2,5}^{\text{jobb}} \leq \sqrt{(R+r)^2 - \left[\frac{2}{3} \cdot (R-r) \right]^2}. \quad (37)$$

$$z(x_{0,5}, y_{2,5}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x_{0,5}^2 + y_{2,5}^2} - R \right)^2}, \text{ azaz}$$

$$z(x_{0,5}, y_{2,5}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot (R - r) \right)^2 + y_{2,5}^2} - R \right)^2}. \quad (38)$$

$$\text{„6.”: } x_{0,6} = \frac{1}{3} \cdot (R - r); \quad (39)$$

$$y_{2,6}^* = \sqrt{(R - r)^2 - x_{0,6}^2} = \sqrt{(R - r)^2 - \left[\frac{1}{3} \cdot (R - r) \right]^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot (R - r), \text{ tehát}$$

$$y_{2,6}^* = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot (R - r); \quad (40)$$

$$y_{2,6}^{**} = \sqrt{(R + r)^2 - \left[\frac{1}{3} \cdot (R - r) \right]^2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot R^2 + 5 \cdot R \cdot r + 2 \cdot r^2},$$

tehát az egyszerűbb alakkal:

$$y_{2,6}^{**} = \sqrt{(R + r)^2 - \left[\frac{1}{3} \cdot (R - r) \right]^2}; \quad (41)$$

most a (10) képlet szerint:

$$-y_{2,6}^{**} \leq y_{2,6}^{\text{bal}} \leq -y_{2,6}^*, \text{ azaz}$$

$$-\sqrt{(R + r)^2 - \left[\frac{1}{3} \cdot (R - r) \right]^2} \leq y_{2,6}^{\text{bal}} \leq -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot (R - r);$$

továbbá

$$y_{2,6}^* \leq y_{2,6}^{\text{jobb}} \leq y_{2,6}^{**}, \text{ azaz}$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot (R - r) \leq y_{2,6}^{\text{jobb}} \leq \sqrt{(R + r)^2 - \left[\frac{1}{3} \cdot (R - r) \right]^2}. \quad (42)$$

$$z(x_{0,6}, y_{2,6}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x_{0,6}^2 + y_{2,6}^2} - R \right)^2}, \text{ azaz}$$

$$z(x_{0,6}, y_{2,6}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{\left[\frac{1}{3} \cdot (R - r) \right]^2} + y_{2,6}^2 - R \right)^2}. \quad (43)$$

„7.”: $x_{0,7} = 0;$ (44)

$$y_{2,7}^* = \sqrt{(R - r)^2 - x_{0,7}^2} = \sqrt{(R - r)^2 - 0} = R - r, \text{ tehát}$$

$$y_{2,7}^* = R - r; \quad (45)$$

$$y_{2,7}^{**} = \sqrt{(R + r)^2 - x_{0,7}^2} = \sqrt{(R + r)^2 - 0} = R + r, \text{ tehát}$$

$$y_{2,7}^{**} = R + r; \quad (46)$$

most a (10) képlet szerint:

$$-y_{2,7}^{**} \leq y_{2,7}^{\text{bal}} \leq -y_{2,7}^*, \text{ azaz}$$

$$-(R + r) \leq y_{2,7}^{\text{bal}} \leq -(R - r), \quad (47)$$

továbbá

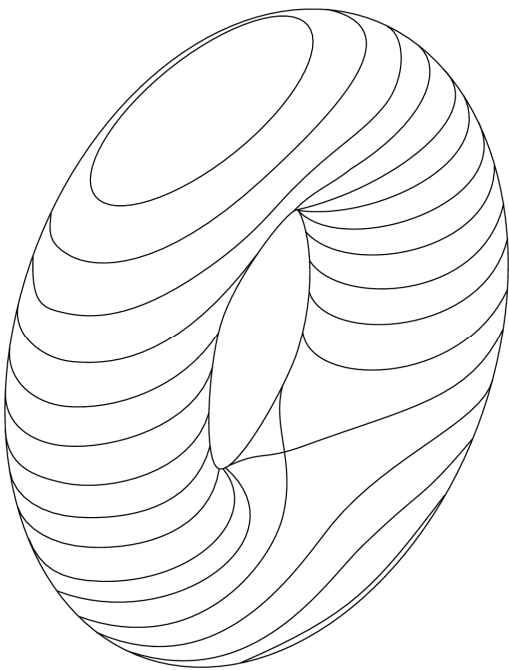
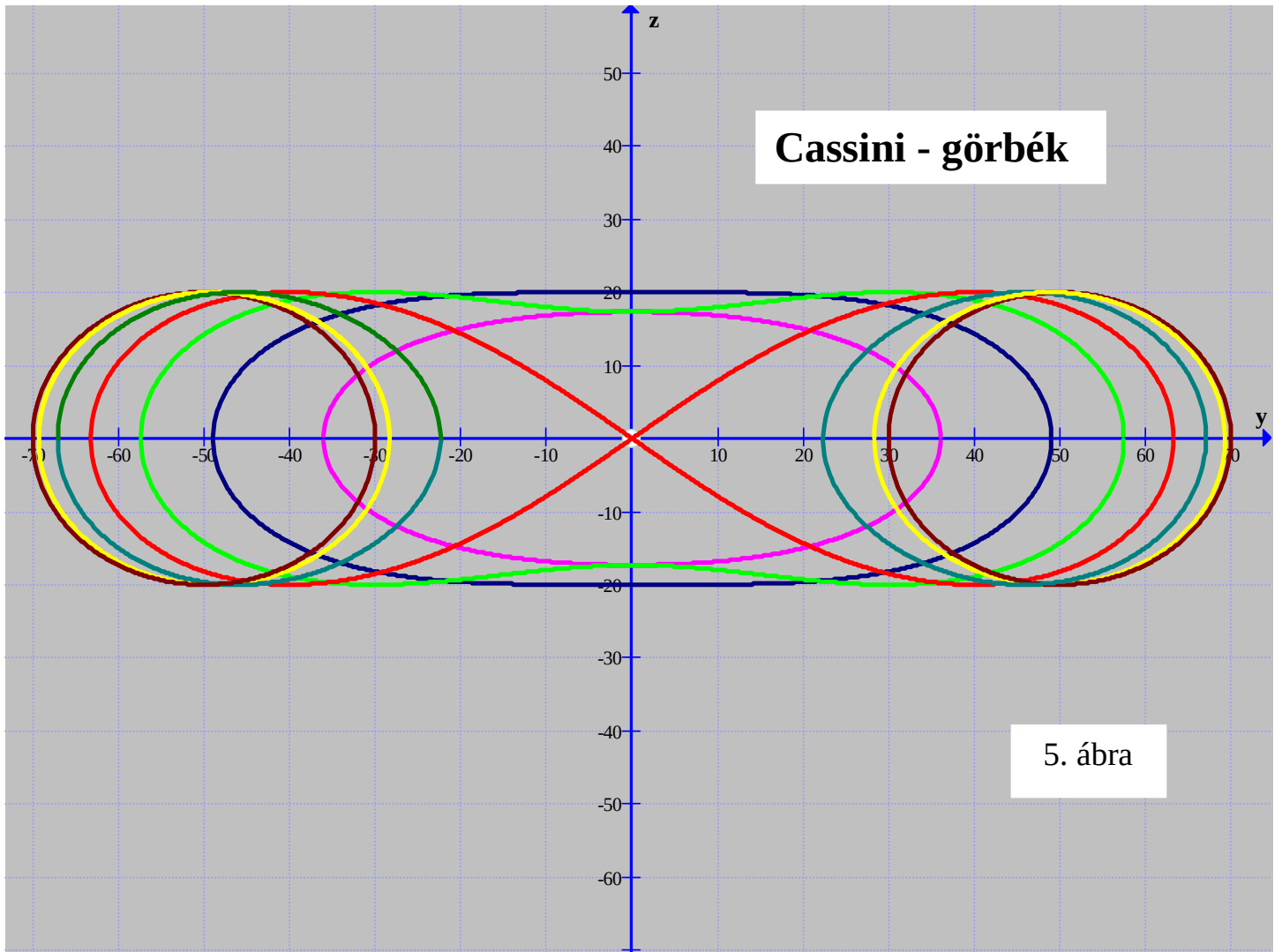
$$y_{2,7}^* \leq y_{2,7}^{\text{jobb}} \leq y_{2,7}^{**}, \text{ azaz}$$

$$R - r \leq y_{2,7}^{\text{jobb}} \leq R + r. \quad (48)$$

$$z(x_{0,7}, y_{2,7}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x_{0,7}^2 + y_{2,7}^2} - R \right)^2}, \text{ azaz}$$

$$z(x_{0,7}, y_{2,7}) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{y_{2,7}^2} - R \right)^2}. \quad (49)$$

A grafikonokat a **Graph** programmal készítettük el, $R = 50 \text{ mm}$, $r = 20 \text{ mm}$ adatokkal. Az eredményeket az 5. ábra mutatja be. Az ábrák kis szépséghibája, hogy a körök ellipszissé torzulnak. Ennek az az oka, hogy a képernyő koordináta - rendszerének vízszintes és függőleges tengelyén nem egyenlő nagyok a skála - egységek. Az itteni eredmények szakirodalmi megfelelőinek térhatású megjelenítése a 6. ábrán látható.



6. ábra

Az ábra forrása: [2].

Irodalom:

- [1] - <http://hu.wikipedia.org/wiki/Cassini-görbe>
- [2] - <http://www.tankonyvtar.hu/konyvek/uj-matematikai-mozaik/uj-matematikai-mozaik-3-081030-18>
- [3] - <http://mathworld.wolfram.com/CassiniOvals.html>
- [4] – Füzi János: 3D grafika és animáció PC - n
ComputerBooks, Budapest, 1995.

Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnök tanár

Sződliget, 2009. június 11.